

KARAKTERISASI KESALAHAN BERPIKIR SISWA DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP MATEMATIKA

Subanji & Toto Nusantara

Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang, Jln. Semarang 5 Malang
e-mail: subanjimat@yahoo.co.id

Abstract: Faulty Thinking of Students in Constructing Mathematical Concepts. This study was aimed at identifying how Junior School students construct mathematical concepts. The subjects were 391 nine graders. The instrument was developed in line with the curriculum for junior high schools concerning numbers, algebra, and geometry. There were two instruments: primary and additional (probing). The primary instrument consisted of mathematical questions the answers to which had to be justified with reasons. The additional instrument, having the function to probe, was used to more comprehensively explore the students' reasons underlying their answers to the questions in the main instrument. The results show that the students' construction of mathematical concepts included faulty pseudo-right thinking, pseudo-wrong thinking, analogical thinking, and logical thinking.

Keywords: characteristics of faulty thinking, construction of mathematical concepts

Abstrak: Karakterisasi Kesalahan Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Matematika. Penelitian *mixed method* ini dilakukan terhadap 391 siswa kelas IX SMP dan bertujuan untuk mengkaraktirikan kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep tentang operasi bilangan bulat dan pecahan, bentuk aljabar, geometri, akar dan pangkat dua, dan fungsi. Subjek adalah 391 siswa SMP kelas IX dari 4 Kabupaten/Kota. Pengembangan instrument didasarkan pada kurikulum yang berlaku di SMP pada bidang bilangan, aljabar, dan geometri. Digunakan instrumen utama dan instrumen pelacak. Instrumen utama berupa beberapa pernyataan matematika yang harus dijustifikasi benar-salahnya oleh siswa beserta alasannya. Instrumen pelacak digunakan untuk memperkuat alasan siswa dalam menjawab soal utama, yang berisi pernyataan dan alasan, dan siswa diminta menjustifikasi benar-salahnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa karakteristik kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika mencakup kesalahan berpikir pseudo-benar dan pseudo-salah, berpikir analogi, menempatkan konsep, dan dalam berpikir logis.

Kata kunci: karakteristik kesalahan, kesalahan berpikir, konstruksi konsep matematika

Seperti yang diungkapkan oleh Mullis dan kawan-kawan (2012), prestasi siswa kelas 8 bidang matematika Sekolah Menengah Pertama (SMP) Indonesia pada studi internasional TIMSS 2011 berada pada level rendah dengan skor 386, lebih rendah dari skor tahun 2007 sebesar 397. Apabila prestasi ini ditinjau dari urutan negara, tahun 2011 berada pada urutan 38 dari 45 negara peserta dan pada tahun 2007 berada pada urutan 36 dari 49 negara. Rendahnya prestasi tersebut mencerminkan capaian ranah (*domain*) isi dan ranah kognitif siswa selama ini. Ranah isi meliputi empat bidang kajian, yaitu bilangan, aljabar, geometri, serta data dan peluang. Persentase masing-masing bi-

dang pada instrumen pengukuran berturut-turut adalah 30%, 30%, 20%, dan 20%. Ranah kognitif meliputi pengetahuan (*knowing*), penerapan (*applying*) dan penalaran (*reasoning*). Persentasenya pada instrumen berturut-turut adalah 35%, 40% dan 25%. Bentuk instrumen berupa pilihan ganda (*multiple-choice*) dan isian (*constructed-response*).

Distribusi capaian skor siswa Indonesia untuk masing-masing ranah diperlihatkan pada Tabel 1. Capaian rerata skor siswa Indonesia untuk masing-masing ranah apabila dibandingkan dengan rerata internasional adalah separohnya. Demikian pula apabila skor tersebut dibandingkan dengan negara Asean, khususnya

Singapura, perbedaan tersebut sangat signifikan. Dengan skor maksimum 100, siswa Indonesia hanya mampu mencapai skor 24 untuk bilangan, 22 untuk aljabar, 24 untuk geometri, dan 29 untuk data dan peluang. Hasil ini cukup signifikan perbedaannya dengan skor yang diperoleh oleh siswa-siswa Singapura. Dengan memerhatikan hasil tersebut, tampaknya siswa-siswa Indonesia mengalami kesulitan dalam mengerjakan soal-soal matematika yang diberikan oleh panitia. Lebih lanjut, siswa Indonesia juga lemah dalam hal pengetahuan, aplikasi, dan bernalar dalam matematika.

Kesulitan siswa dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika seringkali tercermin dalam bentuk kesalahan yang dibuat oleh siswa. Ihwal kesulitan dan kesalahan siswa dalam mengerjakan matematika telah banyak dikaji oleh peneliti. Brodie (2010) dalam hasil penelitiannya menjelaskan bahwa kesalahan siswa dalam membangun penalaran matematika meliputi *basic error*, *appropriate error*, *missing information*, *partial insight*. Gal & Linchevski (2010) menemukan bahwa kesulitan siswa dalam representasi geometri mencakup *perceptual organization: gestalt principles*, *recognition: bottom-up and top-down processing*; and *representation of perception-based knowledge: verbal vs. pictorial representation, mental images and hierarchical structure of images*. Bingobali dkk. (2010) mengeksplorasi penyebab terjadinya kesulitan matematika siswa berdasarkan pandangan guru, yang meliputi sebab epistemologis, sebab psikologis, dan sebab pedagogis. Lebih lanjut ditemukan bahwa siswa mengalami kesulitan dalam hal memahami konsep, mengabstraksi konsep, dan mengaitkan matematika dengan kehidupan sehari-hari. Apabila ditinjau dari kadar kesalahannya, dapat ditemukan bahwa siswa menjawab benar soal yang diberikan, akan tetapi tidak dapat memberikan alasan kenapa dia menjawab soal tersebut, atau sebaliknya dia sebenarnya mengerti apa yang ditanyakan akan tetapi memberikan jawaban yang salah. Hal ini merujuk pada Subanji (2007) yang menyatakan bahwa kesalahan yang dibuat siswa kadangkala tidak sepenuhnya salah. Siswa melakukan apa yang disebut berpikir pseudo, pseudo-benar dan pseudo-salah. Pseudo-benar terjadi ketika siswa memperoleh jawaban benar tetapi sebenarnya penalarannya salah. Pseudo-salah terjadi ketika jawaban siswa salah, tetapi sebenarnya siswa tersebut mampu bernalar secara benar.

Kesalahan siswa dalam bekerja matematika perlu mendapatkan perhatian karena, kalau tidak segera diatasi, kesalahan tersebut akan berdampak terhadap pemahaman siswa pada konsep matematika berikut-

nya. Untuk dapat memperbaiki kesalahan yang dilakukan siswa, diperlukan pengetahuan tentang sumber kesalahan. Beberapa peneliti melakukan penelusuran sumber masalah dengan menggunakan peta kognitif (*cognitive map*). Pena dan kawan-kawan (2007) berdasarkan hasil kajiannya menyimpulkan bahwa *cognitive map* dapat menggambarkan hubungan sebab akibat dari berbagai fenomena dan konsep, serta dapat dimodelkan. Selanjutnya dengan model tersebut kesalahan yang dilakukan siswa dapat diperbaiki. Jacobs (2003) mengungkapkan bahwa *cognitive map* dapat menunjukkan arah berpikir sedemikian sehingga bisa digunakan sebagai petunjuk untuk langkah berikutnya. Perdikaris (2011) mengungkapkan *cognitive style* siswa dalam menyelesaikan masalah geometri dengan teori Van Hiele. Elbaz dan kawan-kawan (dalam Komf & Denicollo 2005) menggunakan *cognitive map* untuk menjelaskan struktur pengetahuan yang dimiliki oleh guru atau siswa. Proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika dapat dipotret menggunakan *cognitive map*. Dengan *cognitive map* juga dapat ditelusuri letak kesalahan yang dibuat oleh siswa, yaitu dengan memanfaatkan kerangka kerja Piaget tentang proses konstruksi pengetahuan, yaitu asimilasi dan akomodasi.

Proses berpikir dalam konteks *pemahaman* merupakan ukuran kualitas dan kuantitas hubungan antara suatu ide dengan ide yang telah ada (dimiliki). Pemahaman sangat bergantung pada modal ide yang dimiliki dan kualitas hubungan antar-ide tersebut. Ide yang dipahami dihubungkan dengan banyak ide yang lain oleh jaringan konsep dan prosedur yang bermakna. Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya, terkait satu ide dengan ide yang lain secara bermakna. Pemahaman instrumental merupakan jaringan ide yang terpisah-pisah tanpa makna. Pengetahuan yang diperoleh dengan hafalan berada pada pemahaman instrumental, karena terbentuk dari proses konstruksi yang terpisah-pisah tanpa makna hal ini seperti yang disampaikan oleh Skem (dalam Tipps dkk., 2008).

Artikel ini membahas tentang hasil kajian yang dilakukan terhadap siswa-siswa sekolah menengah pertama dalam bekerja matematika. Kajian tersebut dilakukan untuk melihat secara lebih rinci tipe-tipe kesalahan siswa khususnya dari aspek berpikir pada saat mereka mengkonstruksi konsep matematika. Dengan diketahuinya tipe-tipe kesalahan yang dilakukan, nantinya dapat dirancang desain scaffolding ataupun skema remedial yang akan digunakan untuk melakukan restrukturisasi berpikir siswa.

Tabel 1. Rerata Persentase Siswa Menjawab Benar pada Dimensi Konten dan Kognitif

Negara	Bilangan	Aljabar	Geometri	Data Peluang	Pengetahuan	Aplikasi	Bernalar
Singapura	77(0.9)	72(1.1)	71(1.0)	72(0.9)	82(0.8)	73(1.0)	62(1.1)
Malaysia	39(1.3)	28(0.9)	33(1.1)	38(0.9)	44(1.2)	33(1.0)	23(0.9)
Thailand	33(1.0)	27(0.9)	29(0.9)	38(0.8)	38(1.0)	30(0.8)	22(0.8)
Indonesia	24(0.7)	22(0.5)	24(0.6)	29(0.7)	37(0.7)	23(0.6)	17(0.4)
Internasional	43(0.1)	37(0.1)	39(0.1)	45(0.1)	49(0.1)	39(0.1)	30(0.1)

Sumber: (Mullis, dkk, 2012)

METODE

Pendekatan dalam penelitian adalah *mixed method*, yaitu mengombinasikan pendekatan kuantitatif pada pengolahan data tentang kesalahan-kesalahan siswa dalam memecahkan masalah serta pendekatan kualitatif pada pengkajian proses konstruksi konsep matematika siswa serta diagnosis nya melalui peta kognitif. Subjek penelitian adalah 391 siswa SMP kelas IX dari 4 (empat) Kabupaten/Kota, yaitu Malang, Blitar, dan Tulungagung. Pengembangan instrumen didasarkan pada kurikulum yang berlaku di SMP dan mempertimbangkan cakupan TIMSS pada bidang-bidang bilangan, aljabar, dan geometri. Kepada subjek diberikan 2 (dua) instrumen penelitian, yaitu instrumen utama dan instrumen pelacak. Instrumen utama berupa beberapa pernyataan matematika yang harus dijustifikasi benar-salahnya oleh siswa. Setiap justifikasi harus diikuti dengan alasan. Setelah menyelesaikan instrumen utama, siswa diberi jeda waktu 10 menit dan melanjutkan menyelesaikan instrumen pelacak. Instrumen pelacak digunakan untuk memperkuat alasan siswa dalam menjawab soal utama. Instrumen pelacak berisi pernyataan dan alasan; siswa diminta untuk mengjustifikasi benar-salahnya pernyataan tersebut.

Kesalahan yang dilakukan oleh siswa saat mengerjakan instrumen dikelompokkan dan diidentifikasi polanya. Pola kesalahan yang ditemukan digunakan untuk melacak lebih mendalam tentang karakteristik kesalahan siswa dalam berpikir matematis. Pelacakan mendalam terutama dilakukan kepada beberapa subjek penelitian berdasarkan pola kesalahan yang dibuat. Kepada subjek tersebut diberikan instrumen utama sekaligus diwawancarai untuk investigasi lebih lanjut. Selanjutnya, hasil wawancara digunakan untuk menggambarkan proses berpikir (*cognitive map*) siswa termasuk identifikasi terjadinya kesalahan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Karakteristik kesalahan berpikir siswa dalam mengkonstruksi konsep matematika dapat dikelom-

pokkan menjadi kesalahan karena berpikir pseudo, kesalahan berpikir analogi, dan kesalahan konsep.

Kesalahan Berpikir Pseudo Siswa dalam Mengkonstruksi Konsep Matematika

Kesalahan berpikir pseudo siswa dalam mengkonstruksi konsep matematika ada dua jenis kesalahan, yakni berpikir pseudo “benar” dan berpikir pseudo “salah”. Pseudo benar terjadi ketika siswa menjawab benar soal yang diberikan tetapi tidak bisa memberi alasan terhadap jawabannya atau salah dalam memberikan alasan (Subanji, 2007; Vinner, 1997). Pseudo-salah terjadi ketika siswa salah dalam menjawab, tetapi setelah dilakukan refleksi, mereka dapat memperbaikinya menjadi jawaban yang benar. Sebenarnya siswa mampu menyelesaikan masalah yang diberikan, tetapi karena jawaban dihasilkan dari proses berpikir spontan, samar-samar, dan tidak ada kontrol, maka hasilnya adalah jawaban yang salah. Apabila dilakukan refleksi, siswa umumnya dapat memperbaiki kesalahannya. Ini menunjukkan bahwa berpikir siswa tersebut masih semu (Subanji, 2007).

Ketika menjawab soal no 1 pada instrumen penelitian yang menanyakan benar atau salah $-4 - 3 = -7$. Respon yang diberikan siswa disajikan pada Tabel 2.

Umumnya (87%) siswa menjawabnya dengan benar. Artinya, pada dua pernyataan yang diberikan, siswa memberikan jawaban benar. Namun, apabila diidentifikasi dari alasan yang diberikan siswa, kebanyakan siswa memberi alasan “punya hutang 3 hutang lagi 4, hutangnya menjadi 7”.

Pada kasus ini, siswa memaknai lambang “-” pada posisi yang sama, “lambang bilangan negatif 4” (-4) dan operasi kurang, yaitu dikurang 3 (-3). Keduanya dianalogikan dengan hutang. Siswa yang menggunakan analogi “hutang” akan mengalami kesulitan ketika menghadapi soal $-4 - (-3) = -1$. Mereka dihadapkan pada kesulitan menginterpretasikan “dikurangi dengan negatif 3”, yaitu $-(-3)$. Ketika ditelusuri lebih jauh, ketika berhadapan dengan soal ini siswa menggunakan alasan “negatif ketemu negatif hasilnya positif”. Tentu saja alasan tersebut “kurang tepat”, ka-

rena dalam kasus $-(-3)$, tanda “-” pertama menyatakan operasi “minus”, sedangkan lambang “-” kedua menyatakan lambang bilangan negatif. Siswa yang lain menginterpretasikan $-(-3)$ sebagai “negatif dikalikan negatif hasilnya positif”. Alasan ini juga “kurang tepat”, karena lambang “-” pada bagian di luar tanda kurung adalah operasi, sedang pada bagian kedua lambang “-” menyatakan lambang bilangan negatif. Dua hal berbeda disamakan dan dikalikan, hal ini termasuk kriteria “salah dalam konsep”.

Dari proses penyelesaian masalah yang diuraikan di atas, siswa mengalami proses berpikir pseudo dalam menyelesaikan masalah terkait operasi bilangan bulat. Apabila digambarkan alur proses berpikir pseudo siswa melalui tahapan (1) membuat analogi bilangan

bulat (khususnya bilangan negatif) dengan hutang, (2) mengoperasikan bilangan dengan membuat proses transaksi, dan (3) mengubah hasil transaksi menjadi bilangan bulat. Alur berpikir pseudo siswa digambarkan pada Gambar 1.

Kekacauan cara berpikir siswa terjadi karena menyamakan antara lambang bilangan dengan operasi bilangan. Meskipun siswa memberikan jawaban benar, namun alasan yang digunakan tidak tepat. Karena itu dalam berpikir siswa terjadi proses berpikir pseudo-benar.

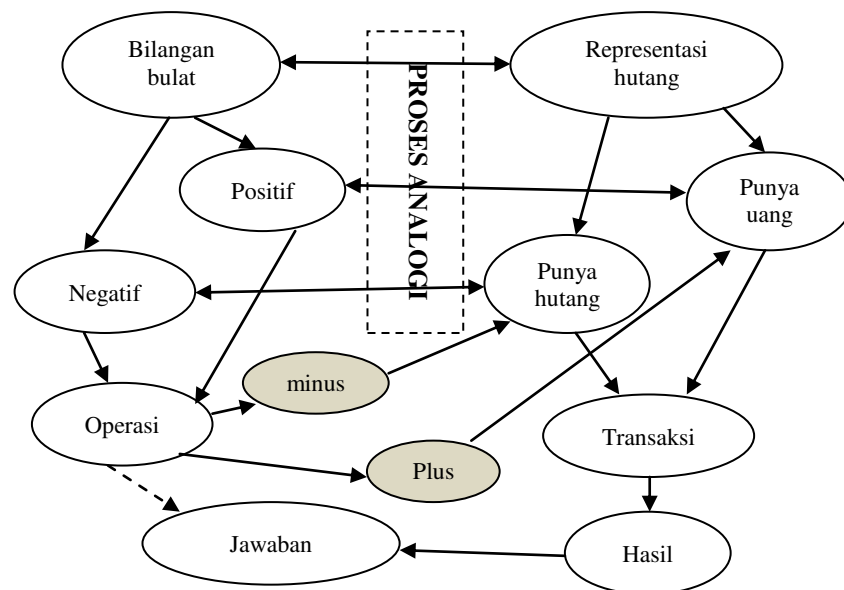
Berpikir pseudo “salah” dilakukan siswa ketika menjawab soal pada instrumen nomor 4, benar atau salah $4 \times 2 + 3 = 4 \times (3 + 2)$. Respon yang diberikan siswa ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 2. Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal - 4 - 3 = - 7

Pernyataan	Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
		True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
-4 - 3 = -7	karena punya hutang 4 hutang lagi 3, hutangnya menjadi 7	0	81	15	8	92	12
	Karena negatif dikurang positif hasilnya negatif	62	10	13	22	97	10
	Karena $-4 - 3 = -7$ sama dengan $-4 + (-3) = -7$	36	0	3	14	42	11
	Karena bilangan negatif dikurangi bilangan positif itu menjadi ditambah. Hasilnya negatif	19	22	5	12	51	7
	Mengulang soal	0	0	15	22	30	7
	Tidak memberi alasan	0	0	17	15	28	4
Jumlah		117	113	68	93	340	51

Tabel 3. Rangkuman Alasan Siswa untuk Soal $4 \times 2 + 3 = 4 \times (3 + 2)$

Pernyataan	Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
		True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
$4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$	Karena perkalian didahulukan dan dilanjutkan dengan penjumlahan	42	31	6	32	102	9
	Karena $2+3$ merupakan penjumlahan, jadi harus dipisah	36	37	10	21	85	19
	Karena $4 \times 2 + 3 = 11$ dan $4 \times (2 + 3) = 20$	74	0	4	9	70	17
	Tidak ada alasan	3	10	5	10	17	11
	Karena penjumlahan harus dijumlahkan terlebih dahulu	0	15	3	15	30	3
	Dengan diberinya tanda tutup kurung, akan memudahkan cara menghitungnya		21		7	17	11
Jumlah		155	114	28	94	281	110



Gambar 1. Proses Analogi Siswa terhadap Bilangan Bulat Negatif dan Hutang

Dalam menyelesaikan soal $4 \times 2 + 3 = 4 \times (3 + 2)$, masih banyak siswa yang mengalami berpikir pseudo, sebanyak 114 (29,16%) siswa dari 391 orang. Siswa yang menjawab salah masih relatif tinggi, yakni 94 (24%) siswa. Kesalahan banyak terjadi karena siswa hanya mengingat sifat-sifat dalam operasi campuran, bahwa ada sifat komutatif, distributif, dan mendahulukan perkalian daripada penjumlahan. Cukup banyak siswa yang menjawab bahwa pernyataan tersebut adalah benar dengan alasan “sifat komutatif”. Siswa yang mengalami berpikir pseudo salah ini, teringat secara samar-samar tentang sifat komutatif (sebenarnya yang diinginkan sifat distributif). Menurut Leron (2004), siswa tersebut mengalami proses sistem 1 (S1) yaitu cepat, otomatis, tanpa berupaya, tak sadar, dan tak fleksibel. Namun menurut Vinner (1997), siswa tersebut mengalami proses berpikir *fuzzy memory* atau mengingat samar-samar. Siswa ingat bahwa ada sifat operasi bilangan komutatif, distributif, dan asosiatif, tetapi ingatannya hanya samar-samar sampai akhirnya dia memilih komutatif. Padahal sifat komutatif tidak sesuai bila diterapkan pada masalah tersebut, karena sifat komutatif menyatakan $a + b = b + a$ atau $a \times b = b \times a$. Sebenarnya alasan yang lebih sesuai adalah sifat distributif, $a \times (b \times c) = ab + ac$. Semestinya pernyataan tersebut adalah salah, karena tidak memenuhi sifat distributif. Seharusnya adalah $4 \times (2 + 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3$. Ketika ditelusuri lebih lanjut dengan wawancara:

P: kenapa kamu menjawab benar masalah tersebut?

S: karena sifat komutatif

P: kalau ada operasi bilangan campuran dan ada yang dikurung, apa maksudnya?

S: yang dikurung didahulukan

P: yakinkah dengan jawabanmu itu?

S: Ehm... boleh saya coba lagi?

P: silahkan

S: sisi kiri 4×2 sama dengan 8, ditambah 3 hasilnya 11. Sisi kanan yang dikurung $2 + 3$ berarti hasilnya 5. Kalau 4 dikali 5 hasilnya 20. Berarti salah

Dari dialog tersebut terlihat bahwa sebenarnya siswa mampu menjawab dengan benar, namun karena berpikir samar-samar dan sudah digunakan untuk menyimpulkan akhirnya jawabannya salah. Menurut Vinner (1997), berpikir siswa tersebut dilakukan spontan tanpa ada refleksi dan sudah digunakan untuk menyimpulkan jawaban. Menurut Leron (2004), berpikir siswa tersebut cepat dan tidak sadar. Siswa langsung menjawab dan jawabannya salah. Namun sebenarnya siswa tersebut mampu menyelesaikan masalah dengan baik setelah melakukan refleksi.

Proses berpikir pseudo-salah juga terjadi ketika siswa menjawab masalah pecahan $1/3 + 1/3 = 2/6$. Siswa menjawab bahwa pernyataan tersebut adalah benar, dengan alasan untuk menjumlahkan pecahan dilakukan dengan menyamakan penyebut dan “jika penyebut sudah sama langsung dijumlahkan pembilangnya”. Sebenarnya alasan siswa sudah tepat dan masuk akal, namun kesimpulan yang diambil “salah”. Siswa menjumlahkan pembilang dengan pembilang dan menjumlahkan penyebut dengan penyebut. Jawaban siswa salah, meskipun sebenarnya siswa bisa menyelesaikannya. Dalam hal ini siswa tidak mengontrol lagi jawabannya, tidak ada refleksi. Karena itu, proses berpikir siswa tersebut merupakan berpikir pseudo “salah”. Dia hanya mengingat bahwa dalam

penjumlahan pecahan yang paling penting adalah menyamakan penyebut, berikutnya yang diingat ditambahkan. Hal ini menunjukkan terjadinya proses konstruksi yang terputus, sehingga menghasilkan jawaban yang salah. Ketika diberi soal pelacak, siswa secara konsisten menjawab benar pernyataan tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa dia yakin dengan jawaban yang diberikan. Proses berpikir siswa tersebut dapat diilustrasikan pada Gambar 2.

Proses konstruksi yang dilakukan siswa tetap berlangsung dengan baik, sampai proses menyamakan penyebut dan menjumlahkan pembilang dengan pembilang. Namun kesalahan terjadi ketika siswa menambah konstruksi menjumlahkan penyebut dengan penyebut.

Proses berpikir pseudo-salah juga dilakukan oleh 162 siswa (41%) ketika menjawab pertanyaan “Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm”. Siswa menjawab setuju dengan pernyataan tersebut dengan alasan karena ada tiga sisi maka bisa dibuat segitiga. Ketika ditelusuri lebih lanjut, siswa hanya menjawab secara spontan. Menurut Pape (2004), siswa tersebut sedang berpikir *direct translated approach* (DTA). Dia hanya berpikir sepanjang ada tiga sisi pasti bisa dibuat segitiganya. Ketika ditelusuri lebih lanjut, ternyata siswa tidak memerhatikan panjang-panjang sisinya, yang penting bagi siswa adalah ada tiga ruas garis.

P: kamu setuju, bahwa ada segitiga dengan panjang sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm?

S: karena ada tiga sisi. Segitiga kan memiliki tiga sisi. Karena ada tiga sisi, berarti bisa dibuat segitiga

P: Kalau kamu gambar, bagaimana bentuk segitiganya?

(Siswa mencoba menggambar sisi-sisi segitiga 6 cm dan 7 cm. Ketika akan menggambar sisi ketiga siswa mencoba-cobanya, tetapi tidak bisa menemukan jawab)

S: Kayaknya gak bisa dibuat

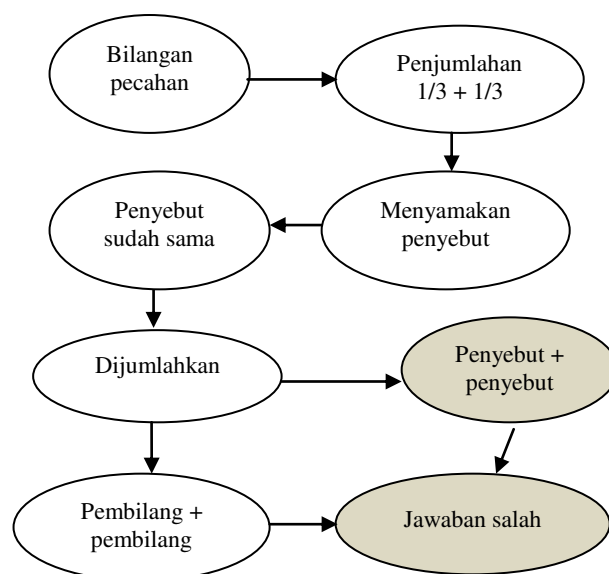
P: Kenapa?

S: sisinya ini kurang pendek. Kalau 14 cm gak bisa, tapi kalau diperpendek bisa digambar.

Dari wawancara tersebut, terlihat bahwa sebenarnya siswa bisa menyelesaikan masalah tetapi jawaban yang diberikan salah dan setelah refleksi siswa mampu memperbaiki menjadi jawaban benar.

Dalam menyelesaikan masalah yang sama, banyak siswa yang berpikir pseudo benar. Ketika diberikan pernyataan “ada segitiga dengan panjang sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14” siswa menjawab tidak setuju. Ini menunjukkan jawaban siswa benar. Namun ketika diminta untuk memberi alasan, siswa menyatakan bahwa “tidak setuju” karena tidak memenuhi *triple pythagoras*, yaitu $6^2 + 7^2 \neq 14^2$. Meskipun jawabannya benar, namun alasan yang diberikan “tidak sesuai”.

Berpikir pseudo siswa tersebut terjadi karena dia hanya mengingat soal bahwa kalau ada informasi tiga sisi segitiga biasanya yang ditanyakan terkait dengan *triple pythagoras*. Karena itu dengan tidak memerhatikan apa sesungguhnya yang ditanyakan, dia langsung mengambil rumus *triple pythagoras*. Karena hasilnya tidak memenuhi *triple pythagoras*, maka siswa menyimpulkan ketiga ruas garis tersebut tidak bisa menjadi segitiga. Siswa yang menjawab dengan alasan ini menganggap seakan-akan segitiga itu hanya siku-siku.



Gambar 2. Proses Berpikir Siswa dalam Konstruksi yang Terputus

Berpikir pseudo juga dilakukan oleh 167 siswa (43%) pada soal aljabar “benar atau salah $2x + 3x = 5x$ ” dan dilakukan oleh 143 siswa (37%) untuk soal “benar atau salah $2x + 3y = 5xy$ ”. Siswa menjawab $2x + 3x = 5x$ sebagai pernyataan yang benar, dengan alasan dimisalkan x dan y sebagai benda (bukan kuantitas), seperti buku, pensil, sapi, kambing, dan sebagainya. Padahal x dalam konteks aljabar adalah bilangan. Sehingga $2x + 3x$ bisa dijumlahkan karena ada sifat dalam operasi bilangan (yaitu sifat distributif) yang menjamin berlakunya penjumlahan $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$. Apabila x dimaknai sebagai benda, maka tidak ada sifat yang menjamin penjumlahan tersebut. Penjumlahan hanya bisa dilakukan dalam konteks kuantitas (bilangan). Hal ini menunjukkan bahwa siswa mengalami proses berpikir pseudo “benar”, meskipun jawabannya benar, namun sebenarnya siswa tidak mampu memberi alasan yang tepat. Proses berpikir pseudo “benar” yang lain juga terjadi ketika siswa memberi alasan terkait dengan gradient. Siswa menganggap bentuk $2x + 3x$ terkait dengan persamaan garis. Siswa teringat dengan persamaan garis $y = 2x$ dan $y = 3x$, di mana masing-masing memiliki gradien 2 dan 3. Alasan bahwa gradien sama langsung dijumlahkan hanya ingatan samar-samar saja.

Kesalahan Berpikir Analogi dalam Mengonstruksi Konsep Matematika

Ketika siswa menjawab masalah yang diberikan apakah “ $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ”, sebanyak 186 siswa (47%) melakukan kesalahan menjawab soal tersebut. Siswa berpikir analogi tentang operasi tersebut dengan operasi $3 + 3 = 6$. Mereka berpikir analog antara bilangan bentuk akar dan bilangan ulat biasa. Analogi yang dilakukan siswa salah karena sifat bilangan akar berbeda dengan sifat bilangan bulat.

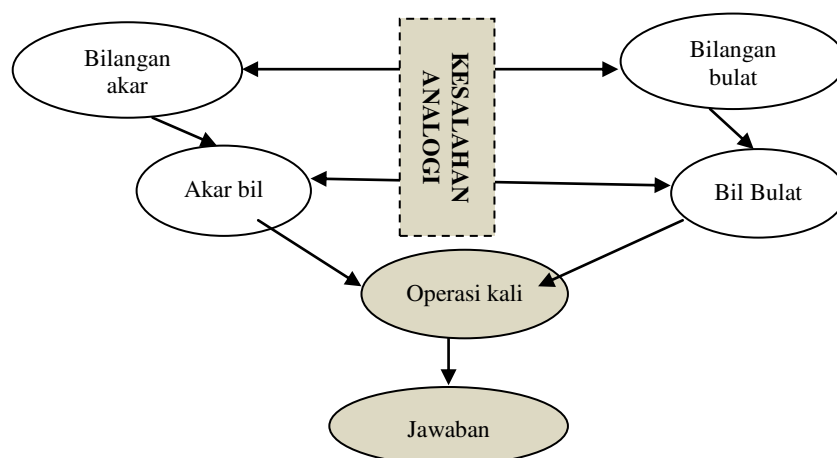
Kesalahan analogi bilangan akar dengan bilangan bulat diperkuat oleh pendapat 162 siswa (41%) yang “setuju” dengan pernyataan $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dan 150 siswa (38%) untuk pernyataan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Kebanyakan siswa menjawab kedua pernyataan tersebut benar dengan alasan bentuk $\sqrt{x+y}$ mirip dengan $x + y$. Sedangkan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ mirip dengan $(xy)^2 = x^2y^2$. Ini berarti berpikir siswa menganalogikan kasus akar dengan bilangan biasa dan kasus penjumlahan dengan kasus perkalian. Adapun proses analogi yang dibuat oleh siswa dapat dilihat pada Gambar 3.

Pada awalnya siswa menganalogikan bilangan akar dengan bilangan bulat. Sifat akar suatu bilangan sama dengan sifat bilangan bulat. Dengan kesamaan sifat tersebut digunakan untuk melakukan operasi penjumlahan dan menghasilkan jawaban yang salah.

Kesalahan berpikir analogi oleh siswa juga terjadi pada masalah fungsi. Ketika siswa diberi masalah fungsi: “misalkan f suatu fungsi. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$ ”, ternyata sebagian besar (60%) siswa menjawab bahwa pernyataan tersebut adalah benar dengan alasan bahwa karena kedua sisi ada f , maka bisa saling dihilangkan, sehingga $a = b$. Proses berpikir analogi siswa terjadi dengan menganalogikan kasus tersebut dengan menganggap f sebagai variabel, sehingga analog dengan $xa = xb$ maka $a = b$. Hal ini menunjukkan bahwa siswa tidak paham konsep fungsi.

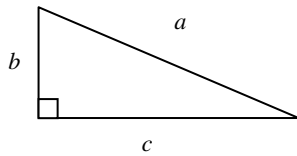
Kesalahan Menempatkan Konsep Matematika

Kesalahan menempatkan konsep masih banyak terjadi pada siswa dalam mengonstruksi konsep matematika. Ketika siswa diberi pernyataan seperti pada Gambar 4.



Gambar 3. Diagram Proses Berpikir Analogi pada Konsep Penjumlahan Akar Bilangan

Diberikan segitiga siku-siku



Maka berlaku rumus pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Gambar 4. Pernyataan pada Soal no. 18 pada Instrumen

Sebagian besar siswa (59%) menjawab setuju dengan pernyataan tersebut. Memori siswa langsung mengingat rumus pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ dengan tidak memahami makna dan syarat-syarat berlakunya rumus tersebut. Sisi mana yang terpanjang untuk rumus tersebut tidak menjadi perhatian, yang penting rumusnya $a^2 + b^2 = c^2$. Sehingga proses berpikir siswa hanya berlangsung secara sederhana, lebih banyak hafal tetapi tidak tahu dimana rumus tersebut bisa diterapkan. Pada kasus segitiga tersebut, siswa mengalami kesalahan menempatkan konsep matematika pada objek yang tidak seharusnya.

Untuk menelusuri kesalahan tersebut, dilakukan wawancara berikut.

P: *mengapa kamu setuju dengan pernyataan tersebut?*
(Peneliti sambil menunjuk masalah yang diberikan)

S: *rumus pythagoras memang begitu yang saya tahu*
(maksudnya $a^2 + b^2 = c^2$)

P: *kamu yakin?*

S: *ya, memang itu yang pernah saya dapatkan.*

Pernyataan siswa tersebut menunjukkan bahwa siswa “benar-benar” mengalami kesalahan konsep. Kesalahan terjadi karena siswa salah menempatkan konsep matematika pada objek yang tidak seharusnya. Pada kasus ini, ada dua hal yang sudah dikenal di pikiran siswa: (1) gambar segitiga dengan sisi-sisinya diketahui a, b, dan c; dan (2) rumus pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Siswa memahami adanya hubungan antara segitiga dan rumus pythagoras, namun hubungan tersebut tidak seperti biasanya. Siswa langsung mengklaim rumus tersebut benar. Menurut Subanji (2011) proses berpikir siswa tersebut didominasi oleh asimilasi, namun asimilasi yang berlangsung tidak sesuai. Ketidaksesuaian asimilasi menyebabkan kesalahan konstruksi konsep.

Kesalahan menempatkan konsep juga terjadi pada kasus $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Dalam menyelesaikan masalah $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, siswa menjawab seperti pada Gambar 5.

Dari alasan tersebut terlihat bahwa siswa belum memahami makna dari $(x + y)^2$. Bahasa komunikasi yang digunakan adalah “jika diuraikan”. Hal ini dipengaruhi oleh kegiatan ketika menyederhanakan bentuk aljabar”. Bahasa komunikasi “diuraikan” tersebut juga dilakukan ketika menjawab $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (Gambar 6).

Siswa lain memberikan alasan dengan bahasa komunikasi “dipisahkan”, bahwa $(x + y)^2$ jika dipisahkan menjadi $x^2 + y^2$ (Gambar 7).

12	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$	X	$(x+y)^2$ jika di uraikan maka hasilnya $x^2 + y^2$
----	-----------------------	---	---

Gambar 5. Kesalahan Menempatkan Konsep pada Alasan Jawaban Soal Nomor 12

17	$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$	X	jika diuraikan maka hasilnya seperti itu.
----	------------------------------------	---	---

Gambar 6. Kesalahan Menempatkan Konsep pada Alasan Jawaban Soal Nomor 17

12	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$	X	karena jika $(x+y)^2$ di pisahkan maka menjadi $x^2 + y^2$
----	-----------------------	---	--

Gambar 7. Kesalahan Menempatkan Konsep pada Alasan Jawaban Soal Nomor 12

13	Misalahkan x, y , dan z bilangan bulat. Jika $x < z$ dan $y < z$, maka $x = y$.	X	Karena kedua huruf x & y lebih kecil dari pada z jadi x & y itu besarnya sama.
----	---	---	--

Gambar 8. Alasan Siswa Karena Huruf untuk Soal Nomor 13

15	Misalahkan x, y , dan z bilangan bulat. Jika $x < y$ dan $x < z$, maka $y < z$.	X	Karena perbandingan dari x ke y cuma 1, & perbandingan dari x ke z itu 2. Jadi $y < z$.
----	---	---	--

Gambar 9. Alasan Siswa karena Perbandingan Huruf untuk Soal Nomor 15

16	Jika $A \subset C$ dan $B \subset C$, maka $A = B$.	X	Jika $A \subset C$ dan $B \subset C$ maka sama dengan $A = B$.
----	---	---	---

Gambar 10. Alasan Siswa untuk Soal Nomor 16

Siswa mengalami kesalahan dalam menyelesaikan masalah tersebut sebagai kesalahan yang “benar-benar” salah, karena setelah diklarifikasi siswa tetap menjawab salah.

P: coba berikan alasan kenapa $(x + y)^2 = x^2 + y^2$..

S: karena dipisahkan

P: Apakah kamu sudah yakin dengan jawaban itu?

S: ya, karena biasanya begitu

Siswa yakin dengan jawaban yang salah tersebut. Ini menunjukkan terjadinya kesalahan konsep dan “benar-benar” salah konsep. Siswa salah mengonstruksi konsep pengkuadratan dari penjumlahan dua bilangan x dan y .

Kesalahan dalam Berpikir Logis

Kesalahan dalam mengonstruksi konsep matematika berkaitan dengan berpikir logis terjadi ketika siswa dihadapkan pada masalah berikut.

Misalkan x, y, z bilangan bulat. Jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x = y$.

Siswa menjawab bahwa pernyataan tersebut benar dengan alasan karena x dan y sama-sama kurang dari z , maka $x = y$ (Gambar 8).

Alasan siswa tidak logis. Siswa tidak bisa memahami bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk semua nilai x, y , dan z . Karena ada x dan y yang sama-sama kurang dari z tetapi x tidak sama dengan y , maka pernyataan tersebut adalah salah. Misalkan $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$. Dalam hal ini $x < y$ dan $y < z$, tetapi $x \neq y$. Pada masalah lain: “misalkan x, y , dan z bilangan bulat. Jika $x < y$ dan $x < z$, maka $y < z$ ”.

Siswa mengatakan bahwa pernyataan tersebut adalah benar karena perbandingan x ke y hanya 1 dan perbandingan dari x ke z adalah 2. Jadi $y < z$ (Gambar 9).

Proses berpikir siswa tidak logis. Tampaknya siswa berpikir urutan x, y , dan z pada huruf *alphabet*. Siswa tidak memahami x, y , dan z sebagai variabel, tetapi lebih mengurutkan variabel sebagai huruf *alphabet*. Dalam urutan huruf *alphabet*, posisinya terurut dari x, y , dan z sehingga menyimpulkan bahwa jika $x < y$ dan $x < z$ maka $y < z$.

Pada kasus lain, ketika siswa diberi pernyataan “jika $A \subset C$ dan $B \subset C$, maka $A = B$ ”, siswa mengatakan bahwa pernyataan tersebut benar dengan alasan $A \subset C$ dan $B \subset C$, maka $A = B$. Alasan siswa tersebut tidak jelas. Siswa tidak bisa memahami bahwa pernyataan tersebut merupakan pernyataan umum yang berlaku untuk setiap A, B , dan C (Gambar 10).

Untuk membuktikan tidak berlakunya pernyataan tersebut cukup dengan memberikan contoh ketidakberlakuannya. Misalnya $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ dan $C = \{1,2,3,4\}$. Dalam hal ini $A \subset C$ dan $B \subset C$ tetapi $A \neq B$.

SIMPULAN

Karakteristik kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika mencakup kesalahan berpikir pseudo-benar dan pseudo-salah, kesalahan dalam berpikir analogi, kesalahan menempatkan konsep, dan kesalahan dalam berpikir logis. Kesalahan dalam berpikir pseudo pada operasi bilangan adalah perkalian didahulukan dari penjumlahan dan operasi

dalam kurung didahulukan. Siswa memahami prosedur tersebut, tetapi siswa menjawab benar pernyataan tersebut. Kesalahan dalam berpikir pseudo dalam segitiga: dalam menjustifikasi tiga ruas garis membentuk segitiga, tidak memerhatikan syarat panjangnya, yang penting bagi siswa adalah ada tiga sisi pasti bisa dibuat segitiga. Dalam kasus segitiga ini juga terdapat berpikir pseudo-benar: siswa menjawab ketiga sisi tidak bisa menjadi segitiga karena tidak memenuhi *phytagoras*. Kesalahan dalam proses analogi dalam bentuk aljabar: ada kesadaran bahwa yang bisa dijumlahkan adalah bilangan, sehingga koefisien dalam bentuk al-

jabar dijumlahkan dengan variabelnya digabungkan. Kesalahan dalam berpikir logis: siswa tidak memahami suatu pernyataan sebagai pernyataan yang berlaku untuk umum dan untuk meningkari cukup dengan memberikan contoh. Hal ini mendukung apa yang ditemukan TIMSS 2011, rendahnya capaian skor yang ada memang didukung masih lemahnya siswa dalam bekerja dalam matematika. Siswa masih mengalami kesulitan dalam bekerja matematika, yang ditunjukkan oleh masih banyaknya kesalahan yang dilakukan oleh siswa.

DAFTAR RUJUKAN

- Bingobali, E., Akkoc, H., Ozmantar, M.F., & Demir, S. 2010. Pre-Service and In-Service Teachers' Views of the Sources of Students' Mathematical Difficulties. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6 (1): 40-59.
- Brodie, K. 2010. *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. New York: Springer.
- Gal, H. & Linchevski, L. 2010. To See Or Not to See: Analyzing Difficulties in Geometry from the Perspective of Visual Perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (2):163-183.
- Jacobs, L.F. 2003. The Evolution of the Cognitive Maps. *Brain, Behavior and Evolution*, 62 (2):128-139.
- Komf, M. & Denicollo, P. 2005. *Teacher Thinking Twenty Years on: Revisiting Persisting Problem and Advances in Education*. Tokyo: Swetz & Zeitlinger Publisher.
- Leron, U. 2004. *Intuitive versus Analytical Thinking: four Theoretical Frameworks*, (Online), (<http://edu.technion.ac.il/Faculty/Uril>), diakses 14 Maret 2012.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Arora, A. 2012. *TIMSS 2011 Internastional Result in Mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Pape, S.J. 2004. Middle School Children's Problem Solving Behavior: A Cognitive Analysis from A Reading Comprehension Perspective. *Jurnal for Research in Mathematics Education*, 35 (3): 187-219.
- Pena, A., Sossa, H., & Gutierrez, A. 2007. Cognitive Map: An Overview and Their Application for Student Modeling. *Computacion y Sistemas*, 10 (3): 230-250.
- Perdikaris, S.C. 2011. Using the Cognitive Styles to Explain an Anomaly in the Hierarchy of the van Hiele Levels. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 6 (2): 35-42.
- Subanji. 2007. *Proses Berpikir Pseudo Penalaran Kova-riasional Mahasiswa dalam Mengonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamik*. Disertasi tidak diterbitkan. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.
- Tipps, S., Johnson, A., & Kennedy, L.M. 2008. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont: Cengage Learning Product.
- Vinner, S. 1997. The Pseudo-conceptual and the Pseudo-analytical Thought Processes in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (2): 97-129.